浅谈伯努利数(Bernoulli Numbers) - 知乎

写文章





# 浅谈伯努利数(Bernoulli Numbers)

[](https://www.zhihu.com/people/shi-xiao-jia-a-27)

[梧桐鹿](https://www.zhihu.com/people/shi-xiao-jia-a-27)

喵喵兔

已关注

154 人赞同了该文章

​

目录

收起

伯努利生成函数

伯努利数的性质

伯努利数生成器

伯努利数和余切函数

黎曼Zeta函数

伯努利多项式

欧拉麦克劳林求和公式

广义欧拉麦克劳林公式

自然数等幂求和

欧拉常数

斯特林公式

几个例子

伯努利数的增长率

## 伯努利生成函数

伯努利数是指数生成函数的系数:

\frac{x}{e^{x}-1}=\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k} x^{k}}{k !}\\

很自然地我们需要将

\dfrac{x}{e^x-1} 级数展开,

\begin{align\*} f(x) &=\frac{x}{e^{x}-1} & \text { with } \lim \_{x \rightarrow 0} f(x)&=1 \\ f^{\prime}(x) &=\frac{e^{x} x-e^{x}+1}{\left(e^{x}-1\right)^{2}} & \text { with } \lim \_{x \rightarrow 0} f^{\prime}(x)&=-\frac{1}{2} \\ f^{\prime \prime}(x) &=\frac{e^{2 x} x-e^{x} x-2 e^{2 x}+2 e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{3}} & \text { with } \lim \_{x \rightarrow 0} f^{\prime \prime}(x)&=\frac{1}{6}\\ &\vdots &\vdots \end{align\*}\\

进而,

\begin{aligned} \frac{x}{e^{x}-1}&=\sum\_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)} x^{n}}{n !} \\ &=1+\left(-\frac{1}{2}\right) x+\left(\frac{1}{6}\right) \frac{x^{2}}{2 !}+\left(-\frac{1}{30}\right) \frac{x^{4}}{4}+\left(\frac{1}{42}\right) \frac{x^{6}}{6 !}+\cdots \\ &=1-\frac{x}{2}+\frac{x^{2}}{12}+\frac{x^{4}}{720}+\frac{x^{6}}{30240}+\cdots \end{aligned}\\

由伯努利生成函数的定义知:

B\_n=\lim\_{x\to0}{\mathrm{d}^n\over\mathrm{d}x^n}\left[x\over e^x-1\right]\\

让我们计算一下前几项伯努利数,

\begin{array}{lll} B\_{0} & =1 & B\_{11}&=0 \\ B\_{1} & =-1 / 2 & B\_{12}&=-691 / 2730 \\ B\_{2} & =1 / 6 & B\_{13}&=0 \\ B\_{3} & =0 & B\_{14}&=7 / 6 \\ B\_{4} & =-1 / 30 & B\_{15}&=0 \\ B\_{5} & =0 & B\_{16}&=-3617 / 510 \\ B\_{6} & =1 / 42 & B\_{17}&=0 \\ B\_{7} & =0 & B\_{18}&=43867 / 798 \\ B\_{8} & =-1 / 30 & \cdots \\ B\_{9} & =0 & B\_{49}&=0 \\ B\_{10} & =5 / 66 & B\_{50}&=4950572052410796482122477525 / 66 \end{array}\\

聪明的你应该能找出一些伯努利数的性质:

* B\_n 是实数
* 对于
* n\geqslant1 有
* B\_{2n+1}=0
* B\_n 正负交替：
* B\_{4n}<0 且
* B\_{4n+2}>0 \quad(n\geqslant 1)
* B\_{2n} 的量级增长非常快

## 伯努利数的性质

伯努利数满足如下关系：

B\_{0}=1 \text { and } \sum\_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{l} n \\ k \end{array}\right) B\_{k}=0, \text { for } n>1.

**Proof :**

\begin{aligned} \frac{x}{e^{x}-1} &=\sum\_{i=0}^{\infty} \frac{B\_{i} x^{i}}{i !} \\ x &=\left(e^{x}-1\right) \sum\_{i=0}^{\infty} \frac{B\_{i} x^{i}}{i !} \\ &=\left(x+\frac{x^{2}}{2 !}+\frac{x^{3}}{3 !}+\cdots\right) \sum\_{i=0}^{\infty} \frac{B\_{i} x^{i}}{i !} \\ &=\sum\_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j}}{j !} \sum\_{i=0}^{\infty} \frac{B\_{i} x^{i}}{i !} \\ &=\sum\_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{(j+1) !} \sum\_{i=0}^{\infty} \frac{B\_{i} x^{i}}{i !} \end{aligned}\\

回忆一下两个无穷级数的柯西乘积：

\left(\sum\_{k=0}^{\infty} a\_{k}\right)\left(\sum\_{m=0}^{\infty} b\_{m}\right)=\left(\sum\_{n=0}^{\infty} c\_{n}\right)\\

其中

\displaystyle c\_{n}=a\_{0} b\_{n}+a\_{1} b\_{n-1}+\cdots+a\_{n} b\_{0}=\sum\_{k=0}^{n} a\_{k} b\_{n-k}\\

得到

\begin{aligned} x &=\sum\_{n=0}^{\infty} \sum\_{k=0}^{n} \frac{x^{n+1-k}}{(n+1-k) !} \cdot \frac{B\_{k} x^{k}}{k !} \\ &=\sum\_{n=0}^{\infty} \sum\_{k=0}^{n} \frac{B\_{k} x^{n+1}}{(n+1-k) ! k !} \\ &=\sum\_{n=0}^{\infty} \sum\_{k=0}^{n} \frac{(n+1) ! B\_{k}}{(n+1-k) ! k !} \frac{x^{n+1}}{(n+1) !} \\ &=\sum\_{n=0}^{\infty} \sum\_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array}\right) B\_{k} \frac{x^{n+1}}{(n+1) !}\\ &=\sum\_{n=1}^{\infty} \sum\_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{l} n \\ k \end{array}\right) B\_{k} \frac{x^{n}}{n !} \end{aligned}\\

对比两边

x 的系数即证。

\square

B\_{0}=1 \text { and } \sum\limits\_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B\_{k}=0, \text { for } n>1\\

也可以表示为

B\_{0}=1\text { and } B\_{n}=-\dfrac{1}{n+1}\sum\limits\_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B\_{k}, \text { for } n>1\\

这种形式更能表现出伯努利数彼此之间的基本关系，我们可以通过写出递归的前几项来证明：

\begin{array}{l} 1=B\_{0} \\ 0=B\_{0}+2 B\_{1} \\ 0=B\_{0}+3 B\_{1}+3 B\_{2} \\ 0=B\_{0}+4 B\_{1}+6 B\_{2}+4 B\_{3} \\ 0=B\_{0}+5 B\_{1}+10 B\_{2}+10 B\_{3}+5 B\_{4} \end{array}\\

另外，我们可以借助

(B + 1)^n = B^n 来记忆上面的等式，将左边二项式展开有：

B^n+\binom{n}{n-1}B^{n-1}+\cdots+\binom{n}{1}B^1+1=B^n\\

然后将所有指数转换为下标：

B\_{n}+\left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right) B\_{n-1}+\cdots+\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) B\_{1}+1=B\_{n}\\

也即

\sum\_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{l} n \\ k \end{array}\right) B\_{k}=0\\

对于

n\geqslant1 有

B\_{2n+1}=0

**Proof 1 :**

考虑伯努利生成函数

\frac{x}{e^{x}-1}=B\_{0}+B\_{1} x+\frac{B\_{2} x^{2}}{2 !}+\frac{B\_{3} x^{3}}{3 !}+\cdots\\

\begin{aligned} g(x) &=\frac{x}{e^{x}-1}-B\_{1} x \\ &=\frac{x}{e^{x}-1}+\frac{x}{2} \\ &=\frac{2 x+x\left(e^{x}-1\right)}{2\left(e^{x}-1\right)} \\ &=\frac{x\left(e^{x}+1\right)}{2\left(e^{x}-1\right)} \\ &=\frac{x\left(e^{x}+1\right)}{2\left(e^{x}-1\right)}\left(\frac{e^{-x / 2}}{e^{-x / 2}}\right) \\ &=\frac{x\left(e^{x / 2}+e^{-x / 2}\right)}{2\left(e^{x / 2}-e^{-x / 2}\right)} \end{aligned}\\

显然

g(x) 是偶函数。 因此，

\dfrac{x}{e^x-1}-B\_1x 的幂级数没有非零奇次幂项，进而结论显然成立。

\square

考虑复函数

f(z)=\frac{z}{e^{z}-1}=\sum\limits\_{n=0}^{\infty}B\_{n}\frac{z^{n}}{n!}\\

设

|z|=1 ，可知

f(z) 在

\mathbb{C} 中是解析的，所以下面复函数的**Laurent**展开式为

\frac{f(z)}{z^{2n+2}}=\frac{B\_{0}}{0!}z^{-2n-2}+\frac{B\_{1}}{1!}z^{-2n-1}+\dots+\frac{B\_{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-1}+\frac{B\_{2n+2}}{(2n+2)!}+\dots\\

在

\mathbb{C} 上由留数定理得到

\oint\_{C}\frac{f(z)}{z^{2n+2}}\,\mathrm dz=2\pi{i}\cdot{\frac{B\_{2n+1}}{(2n+1)!}}\\

令

z=e^{i\theta} ，然后有

\begin{align\*} B\_{2 n+1}&=\frac{(2 n+1) !}{2 \pi i} \int\_{0}^{2 \pi} \frac{e^{i \theta}}{e^{e^{i \theta}-1}} e^{-2 n i \theta-2 i \theta} i e^{i \theta} \,\mathrm d \theta\\ &=\frac{(2 n+1) !}{2 \pi} \int\_{0}^{2 \pi} \frac{e^{-2 n i \theta}}{e^{e^{i \theta}-1}} \,\mathrm d \theta \\ &=\frac{(2 n+1) !}{2 \pi} \int\_{0}^{\pi} \frac{e^{-2 n i \theta}}{e^{e^{i \theta}}-1} \,\mathrm d \theta+\frac{(2 n+1) !}{2 \pi} \int\_{\pi}^{2 \pi} \frac{e^{-2 n i \theta}}{e^{e^{i \theta}}-1} \,\mathrm d \theta \\ &=\frac{(2 n+1) !}{2 \pi} \int\_{0}^{\pi} \frac{e^{-2 n i \theta}}{e^{e^{i \theta}}-1} \,\mathrm d \theta+\frac{(2 n+1) !}{2 \pi} \int\_{0}^{\pi} \frac{e^{-2 n i \theta+2 n \pi i}}{e^{i \theta}-1} \,\mathrm d \theta \\ &=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int\_{0}^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{i\theta}}-1}\,\mathrm d\theta+\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int\_{0}^{\pi}\frac{e^{-2ni\theta}}{e^{e^{-i\theta}}-1}\,\mathrm d\theta\\ &=\frac{(2n+1)!}{2\pi}\int\_{0}^{\pi}-e^{-2ni\theta}\,\mathrm d\theta\\ &=\left\{\begin{array}{ll} 0, & n \geqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2}, & n=0 \end{array}\right. \end{align\*}\\

\square

## 伯努利数生成器

由伯努利数的定义，可以写一个伯努利数生成器[[1]](#ref_1)

from fractions import Fraction as Fr  
  
def bernoulli2():  
 A, m = [], 0  
 while True:  
 A.append(Fr(1, m + 1))  
 for j in range(m, 0, -1):  
 A[j - 1] = j \* (A[j - 1] - A[j])  
 yield A[0] # (which is Bm)  
 m += 1  
  
bn2 = [ix for ix in zip(range(41), bernoulli2())]  
bn2 = [(i, b) for i, b in bn2 if b]  
width = max(len(str(b.numerator)) for i, b in bn2)  
for i, b in bn2:  
 print('B(%2i) = %\*i/%i' % (i, width, b.numerator, b.denominator))

输出：

B( 0) = 1/1  
B( 1) = 1/2  
B( 2) = 1/6  
B( 4) = -1/30  
B( 6) = 1/42  
B( 8) = -1/30  
B(10) = 5/66  
B(12) = -691/2730  
B(14) = 7/6  
B(16) = -3617/510  
B(18) = 43867/798  
B(20) = -174611/330  
B(22) = 854513/138  
B(24) = -236364091/2730  
B(26) = 8553103/6  
B(28) = -23749461029/870  
B(30) = 8615841276005/14322  
B(32) = -7709321041217/510  
B(34) = 2577687858367/6  
B(36) = -26315271553053477373/1919190  
B(38) = 2929993913841559/6  
B(40) = -261082718496449122051/13530

## 伯努利数和余切函数

从前文中，我们知道

g(x)=\frac{x}{e^{x}-1}-B\_{1} x=\frac{x\left(e^{x / 2}+e^{-x / 2}\right)}{2\left(e^{x / 2}-e^{-x / 2}\right)}\\

注意到

\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\

因此

\begin{aligned} g(x) &=\frac{x\left(e^{x / 2}+e^{-x / 2}\right)}{2\left(e^{x / 2}-e^{-x / 2}\right)} \\ &=\frac{x}{2} \operatorname{coth} \frac{x}{2} \end{aligned}\\

由于左侧的泰勒展开式没有非零奇数项，我们可以写成

\frac{x}{2} \operatorname{coth} \frac{x}{2}=\sum\_{n=0}^{\infty} \frac{B\_{2 n} x^{2 n}}{(2 n) !}\\

我们可以从中推导出双曲余切的表达式：

\begin{aligned} \operatorname{coth} x &=\sum\_{n=0}^{\infty} \frac{B\_{2 n}(2 x)^{2 n}}{x(2 n) !} \\ &=\sum\_{n=0}^{\infty} \frac{2 B\_{2 n}(2 x)^{2 n-1}}{(2 n) !} \end{aligned}\\

如果我们在这个等式中用

xi 代替

x ，我们会找到一个关于余切的表达式，对于

|x|<π 有

\cot x=\sum\_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} \frac{2 B\_{2 n}(2 x)^{2 n-1}}{(2 n) !}\\

利用

2\coth (2x)-\coth (x)=\tanh (x)\\

不难得到

\tanh (x)=\sum\_{k=1}^{\infty} 4^{k}\left(4^{k}-1\right) B\_{2 k} \frac{x^{2 k-1}}{(2 k) !}=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{2 x^{5}}{15}-\frac{17 x^{7}}{315}+\ldots \quad|x|<\frac{\pi}{2}\\

\tan (x)=\sum\_{k=1}^{\infty}(-4)^{k}\left(1-4^{k}\right) B\_{2 k} \frac{x^{2 k-1}}{(2 k) !}=x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{2 x^{5}}{15}+\frac{17 x^{7}}{315}+\ldots \quad|x|<\frac{\pi}{2}\\

此外,

\ln \cos x; \ln \sin x; \dfrac{\sin x}{x} ; \ln \dfrac{\sin x}{x}; \ln \dfrac{\tan x}{x} 和其他三角函数也可以用伯努利数表示。

## 黎曼Zeta函数

伯努利数最强大的应用之一是对黎曼zeta函数的计算。

令

k 为实数,

|k|\geqslant 1 , 那么实数上的黎曼zeta函数

\zeta(k) 被定义为:

\zeta(k)=\sum\_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\\

对于

k>1 ，任意素数

p 有

\zeta(k)=\prod\_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-k}}\right)\\

**Proof :**

该定理的证明依赖于由算术基本定理保证的因式分解的唯一性。 有两种方法，一种涉及筛子，另一种来自几何级数。 我们将采用后一种方法。

对于

0 < x < 1 我们有:

\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\\

对于每个素数

p ，以及

k>1 ，我们令

x=\dfrac{1}{p^k}

\dfrac{1}{1-\frac{1}{p^{k}}}=1+\frac{1}{p^{k}}+\frac{1}{p^{2 k}}+\frac{1}{p^{3 k}}+\frac{1}{p^{4 k}}+\cdots\\

如果我们在左边取这些生成函数中的每一个的乘积，我们得到

\begin{align\*} &\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^{k}}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^{k}}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^{k}}}\right) \cdots\\ =&\left(1+\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{2 k}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^{k}}+\frac{1}{3^{2 k}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^{k}}+\frac{1}{5^{2 k}}+\cdots\right)+\cdots \end{align\*}\\

现在使用算术基本定理。 右边展开的每一项都将是这样的形式

\frac{1}{p\_{1}^{m\_{1} k} p\_{2}^{m\_{2} k} \cdots p\_{n}^{m\_{n} k}}\\

其中

m\_1,\cdots,m\_n 是正整数。 根据算术基本定理，每个正整数都有一个唯一的素数幂的因式分解。 因此扩展成为

\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^{k}}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^{k}}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^{k}}}\right) \cdots &=1+\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{3^{k}}+\frac{1}{4^{k}}+\frac{1}{5^{k}}+\frac{1}{6^{k}}+\cdots \\ \prod\_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-k}}\right) &=\zeta(k) \end{aligned}\\

\square

对于任意整数

k>0 ，有

\zeta(2 k)=\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2 k}}=\frac{\left|B\_{2 k}\right|(2 \pi)^{2 k}}{2(2 k) !}\\

**Proof :**

注意到[[2]](#ref_2)

\begin{aligned} \cot x &=\frac{1}{x}+\sum\_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n \pi}+\frac{1}{x-n \pi}\right) \\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n \pi}}+\frac{1}{1-\frac{x}{n \pi}}\right)\\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left(\sum\_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{k}-\sum\_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{k}\right) \\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left(\left[\sum\_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{2 k}-\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{2 k+1}\right]-\sum\_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{2 k}-\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{2 k+1}\right]\right) \\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left(2 \sum\_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n \pi}\right)^{2 k+1}\right) \end{aligned}\\

改变求和顺序并将

k 替换为

k + 1 ，我们得到

\begin{aligned} \cot x &=\frac{1}{x}+\sum\_{n=1}^{\infty} \sum\_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2 x^{2 k-1}}{(n \pi)^{2 k}}\right) \\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{k=1}^{\infty} \sum\_{n=1}^{\infty} \frac{2 x^{2 k-1}}{(\pi)^{2 k}} \cdot \frac{1}{n^{2 k}} \\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{k=1}^{\infty} \frac{2 x^{2 k-1}}{(\pi)^{2 k}} \sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2 k}} \\ &=\frac{1}{x}+\sum\_{k=1}^{\infty} \frac{2 x^{2 k-1}}{(\pi)^{2 k}} \zeta(2 n) \end{aligned}\\

结合

\mathrm{cot}x=\sum\_{k=0}^{\infty}(-1)^{k} \frac{2 B\_{2 k}(2 x)^{2 k-1}}{(2 k) !}=\frac{1}{x}+\sum\_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{2 B\_{2 k}(2 x)^{2 k-1}}{(2 n) !}\\

有

\begin{aligned} \frac{1}{x}+\sum\_{k=1}^{\infty} \frac{2 x^{2 k-1}}{(\pi)^{2 k}} \zeta(2 k) &=\frac{1}{x}+\sum\_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{2 B\_{2 k}(2 x)^{2 k-1}}{(2 k) !} \\ \sum\_{k=1}^{\infty} \frac{2 x^{2 k-1}}{(\pi)^{2 k}} \zeta(2 k)& =\sum\_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{2 B\_{2 k}(2 x)^{2 k-1}}{(2 k) !} \end{aligned}\\

比较两次求和中

x^{2k-1} 的系数得出

\frac{2}{\pi^{2 k}} \zeta(2 k)=(-1)^{k-1} \frac{2^{2 k} B\_{2 k}}{(2 k) !}\\

也即

\zeta(2 k)=\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2 k}}=\frac{\left|B\_{2 k}\right|(2 \pi)^{2 k}}{2(2 k) !}\\

\square

对于

，

k\geqslant3，|B\_{2k+2}|>|B\_{2k}|

**Proof :**

\left|B\_{2 k}\right|=\frac{2 \zeta(2 k)(2 k) !}{(2 \pi)^{2 k}} \quad\left|B\_{2 k+2}\right|=\frac{2 \zeta(2 k+2)(2 k+2) !}{(2 \pi)^{2 k+2}}\\

\begin{aligned} \frac{\left|B\_{2 k+2}\right|}{\left|B\_{2 k}\right|} &=\frac{(2 k+2) !(2 \pi)^{2 k}}{(2 m) !(2 \pi)^{2 m+2}} \\ &=\frac{(2 m+2)(2 m+1)}{(2 \pi)^{2}} \\ &>1\quad (m\geqslant 3) \end{aligned}\\

\square

与此节相关的有一个著名的概率问题，见

[任取两个大于 2 的整数，其互质的概率是多少？151 关注 · 10 回答问题](https://www.zhihu.com/question/443830396)

## 伯努利多项式

伯努利多项式

B\_k(y) ，由以下幂级数展开式定义：

\frac{x e^{x y}}{e^{x}-1}=\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k}(y) x^{k}}{k !}\\

容易观察到，伯努利多项式

B\_k(y) 的常数项实际上是

B\_k 。 如果我们令

y = 0 ，那么

\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\frac{x}{e^x-1}\\

进而

B\_k(0) = B\_k 。注意到

\frac{x}{e^{x}-1}=\sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k} \frac{x^{k}}{k !}\\

\sum\_{k=0}^{\infty}B\_{k}(1) \frac{x^{k}}{k !}=\frac{x e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{-x}{e^{-x}-1}=\sum\_{k=0}^{\infty} (-1)^kB\_{k} \frac{x^{k}}{k !}\\

于是

B\_k(1)=(-1)^kB\_k\\

我们还可以使用伯努利数的生成函数来得到伯努利多项式的递推关系：

B\_{k}(y)=\sum\_{n=0}^{k}\left(\begin{array}{l} k \\ n \end{array}\right) B\_{n} y^{k-n}\\

**Proof :**

\begin{aligned} &\quad\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k}(y) x^{k}}{k !} \\ &=\frac{x e^{x y}}{e^{x}-1} \\ &=\frac{x}{e^{x}-1} \cdot e^{x y} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k} x^{k}}{k !} \cdot \sum\_{k=0}^{\infty} \frac{(x y)^{k}}{k !} \end{aligned}\\

利用柯西乘积有

\begin{aligned} &\quad\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k}(y) x^{k}}{k !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} \sum\_{n=0}^{k} \frac{(x y)^{k-n}}{(k-n) !} \cdot \frac{B\_{n} x^{n}}{n !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} \sum\_{n=0}^{k} \frac{y^{k-n} B\_{k}}{(k-n) ! n !} x^{k} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} \sum\_{n=0}^{k}\left(\begin{array}{l} k \\ n \end{array}\right) y^{k-n} B\_{n} \frac{x^{k}}{k !} \end{aligned}\\

比较右侧和左侧总和中

x 的项，即有

B\_{k}(y)=\sum\_{n=0}^{k}\left(\begin{array}{l} k \\ n \end{array}\right) B\_{n} y^{k-n}\\

\square

利用递归关系，我们可以计算前几个伯努利多项式：

\begin{align\*} B\_{0}(y)&=1 \\ B\_{1}(y)&=y-\frac{1}{2} \\ B\_{2}(y)&=y^{2}-y+\frac{1}{6} \\ B\_{3}(y)&=y^{3}-\frac{3}{2} y^{2}+\frac{1}{2} y \\ B\_{4}(y)&=y^{4}-2 y^{3}+y^{2}-\frac{1}{30} \\ B\_{5}(y)&=y^{5}-\frac{5}{2} y^{4}+\frac{5}{3} y^{3}-\frac{1}{6} y \\ B\_{6}(y)&=y^{6}-3 y^{5}+\frac{5}{2} y^{4}-\frac{1}{2} y^{2}+\frac{1}{42} \end{align\*}\\

这里也验证了每个多项式的常数项都是伯努利数。仔细考察一下

B\_5(y)

\begin{aligned} &\quad\frac{\mathrm d}{\mathrm d y} B\_{5}(y) \\ &=5 y^{4}-10 y^{3}+5 y^{2}-\frac{1}{6} \\ &=5\left(y^{4}-2 y^{3}+y^{2}-\frac{1}{30}\right) \\ &=5 B\_{4}(y) \end{aligned}\\

\begin{aligned} &\quad\int\_{0}^{1} B\_{5}(y)\,\mathrm d y \\ &=\frac{1}{6} y^{6}-\frac{1}{2} y^{5}+\frac{5}{12} y^{4}-\left.\frac{1}{12} y^{2}\right|\_{0} ^{1} \\ &=0 \end{aligned}\\

这两个结果总体上是正确的。 事实上，它们为我们提供了伯努利数的以下归纳定义:

多项式

B\_k(y) 是伯努利多项式当且仅当

* B\_{0}(y)=1
* \displaystyle B\_{k}^{\prime}(y)=k B\_{k-1}(y)
* \displaystyle\int\_{0}^{1} B\_{k}(y) \,\mathrm d y=0\qquad(k \geqslant 1)

第1条是显然的。

第2条，对伯努利多项式的生成函数进行微分：

\begin{aligned} \frac{\,\mathrm d}{\,\mathrm d y} \frac{x e^{x y}}{e^{x}-1} &=\frac{\,\mathrm d}{\,\mathrm d y} \sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k}(y) x^{k}}{k !} \\ \frac{x^{2} e^{x y}}{e^{x}-1} &=\sum\_{k=1}^{\infty} \frac{B\_{k}^{\prime}(y) x^{k}}{k !} \end{aligned}\\

将两边除以

x ，然后将

k 替换为

k + 1 ：

\begin{aligned} &\quad\frac{x e^{x y}}{e^{x}-1} \\ &=\sum\_{k=1}^{\infty} \frac{B\_{k}^{\prime}(y) x^{k-1}}{k !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k+1}^{\prime}(y) x^{k}}{(k+1) !} \end{aligned}\\

由定义

\frac{x e^{x y}}{e^{x}-1}=\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{B\_{k}(y) x^{k}}{k !}\\

知

\frac{B\_{k+1}^{\prime}(y)}{(k+1) !}=\frac{B\_{k}(y)}{k !}\\

B\_{k+1}^{\prime}(y)=(k+1) B\_{k}(y)\\

对于第3条，

\begin{aligned} &\quad\int\_{0}^{1} B\_{k}(y) \,\mathrm dy \\ &=\left.\frac{B\_{k+1}(y)}{k+1}\right|\_{0} ^{1} \\ &=\frac{1}{k+1}\left(B\_{k+1}(1)-B\_{k+1}(0)\right) \\ &=0 \end{aligned}\\

利用了

B\_{k+1}(0) = B\_{k+1}\\

B\_{k+1}(1)=\sum\_{n=0}^{k+1}\left(\begin{array}{c} k+1 \\ n \end{array}\right) B\_{n}=B\_{k+1}\\

因此，对伯努利多项式的原始定义满足这三条性质。

广义伯努利多项式

B\_{n}^{(\alpha)}(x) 由以下生成函数定义:

\left(\frac{t}{e^{t}-1}\right)^{\alpha} e^{x t}=\sum\_{n=0}^{\infty} B\_{n}^{(\alpha)}(x) \frac{t^{n}}{n !}\\

注意到

B\_n^{(1)}(x) = B\_n(x) 和

B\_n^{(1)}(0) = B\_n(x) ，分别是伯努利多项式和伯努利数。

下面是关于伯努利多项式的三个有趣的性质：

\text { 1. } B\_{k}(y+1)-B\_{k}(y)=k y^{k-1}

**Proof :**

\begin{aligned} &\quad\sum\_{k=0}^{\infty}\left(B\_{k}(y+1)-B\_{k}(y)\right) \frac{x^{k}}{k !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k}(y+1) \frac{x^{k}}{k !}-\sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k}(y) \frac{x^{k}}{k !} \\ &=\frac{x e^{x(y+1)}}{e^{x}-1}-\frac{x e^{x y}}{e^{x}-1} \\ &=\frac{x e^{x(y+1)}-x e^{x y}}{e^{x}-1} \\ &=\frac{x e^{x y}\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}-1} \\ &=x e^{x y} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} \frac{x(x y)^{k}}{k !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} y^{k} \frac{x^{k+1}}{k !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} k y^{k} \frac{x^{k}}{k !} \end{aligned}\\

比较

x 的幂的系数即证。

\square

\text { 2. } B\_{k}(1-y)=(-1)^{k} B\_{k}(y)

**Proof :**

\begin{aligned} &\quad\sum\_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left(B\_{k}(y)\right) \frac{x^{k}}{k !}\\ &=\sum\_{k=0}^{\infty}\left(B\_{k}(y)\right) \frac{(-x)^{k}}{k !} \\ &=\frac{-x e^{-x y}}{e^{-x}-1} \\ &=\frac{-x e^{-x y}}{e^{-x}-1}\left(\frac{-e^{x}}{-e^{x}}\right) \\ &=\frac{x e^{-x y} e^{x}}{e^{x}-1} \\ &=\frac{x e^{x(1-y)}}{e^{x}-1} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty}\left(B\_{k}(1-y)\right) \frac{x^{k}}{k !} \end{aligned}\\

比较系数即证。

\square

\text { 3. } B\_{k}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2^{1-k}-1\right) B\_{k}

**Proof :**

\begin{aligned} &\quad\sum\_{k=0}^{\infty}\left(2^{1-k}-1\right) B\_{k} \frac{x^{k}}{k !} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} 2^{1-k} B\_{k} \frac{x^{k}}{k !}+\sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k} \frac{x^{k}}{k !} \\ &=2 \sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k} \frac{(x / 2)^{k}}{k !}+\sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k} \frac{x^{k}}{k !} \\ &=2 \frac{x / 2}{e^{x / 2}-1}-\frac{x}{e^{x}-1} \\ &=\frac{x\left(e^{x / 2}+1\right)-x}{e^{x}-1} \\ &=\frac{x e^{x / 2}}{e^{x}-1} \\ &=\sum\_{k=0}^{\infty} B\_{k}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{x^{k}}{k !} \end{aligned}\\

比较系数即证。

\square

伯努利多项式还有其他几个性质:

1.

B\_{k}(1)=(-1)^{k} B\_{k}  
2.

B\_{2 k}\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(1-3^{1-2 k}\right) B\_{2 k}  
3.

B\_{2 k}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-2^{1-2 k}\right)\left(1-3^{1-2 k}\right) B\_{2 k}

## 欧拉麦克劳林求和公式

涉及伯努利数的最有用的结果之一是由欧拉和苏格兰数学家科林麦克劳林 (1698-1746) 独立发现的连接求和和积分的公式，称为欧拉麦克劳林求和公式。

a,b\in \mathbb{Z}(a<b) ，

f 是

[a,b] 上的光滑函数。 对于所有

m \geqslant 1,m\in \mathbb{N} 有

\sum\_{i=a}^{b-1} f(i)=\int\_{a}^{b} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{a} ^{b}+R\_{m}\\

R\_m=(-1)^{m+1} \int\_{a}^{b} \frac{B\_{m}(y-\lfloor y\rfloor)}{m !} f^{(m)}(x)\,\mathrm d x\\

R\_m 随着

m 趋近无穷大，趋于

0 。

**Proof :**

这里采取数学归纳法，我们的第一步是证明

a = 0,b = 1,m = 1 时的基本情况：

f(0)=\int\_{0}^{1} f(x) \,\mathrm d x+\left.B\_{1} f(x)\right|\_{0} ^{1}+R\_{m}\\

这里

\displaystyle R\_m=\int\_0^1B\_1(x)f^{\prime}(x)\,\mathrm dx\\

注意到

f(x)=f(0)+\int\_{0}^{x} f^{\prime}(t)\,\mathrm d t\\

在

0 到

1 区间内对

x 进行积分，

\begin{aligned} &\int\_{0}^{1} f(x) \,\mathrm d x \\ =&f(0)+\int\_{0}^{1} \int\_{0}^{x} f^{\prime}(t)\,\mathrm d t\,\mathrm d x\\ =&f(0)+\int\_{0}^{1} \int\_{t}^{1} f^{\prime}(t)\,\mathrm d x\,\mathrm d t \\ \color{blue}{(1)}\qquad=&f(0)+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(1-t)\,\mathrm d t\\ =&f(0)+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)\,\mathrm d t+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(-t)\,\mathrm d t \\ =&f(0)+[f(1)-f(0)]+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(-t)\,\mathrm d t \\ \color{blue}{(2)}\qquad=&f(1)+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(-t) \,\mathrm d t \end{aligned}\\

将方程

\color{blue}{(1)} 和

\color{blue}{(2)} 相加。

2 \int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x=f(0)+f(1)+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(1-t) \,\mathrm d t+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(-t) \,\mathrm d t\\

2 \int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x=f(0)+f(1)+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)(1-2 t)\,\mathrm d t\\

整理得到

\begin{aligned} \int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x &=\frac{f(0)+f(1)}{2}+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(t)\left(\frac{1}{2}-t\right) \,\mathrm d t \\ \int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x &=\frac{f(1)-f(0)}{2}+f(0)+\int\_{0}^{1} f^{\prime}(x)\left(\frac{1}{2}-x\right)\,\mathrm d t \\ f(0) &=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x-\frac{1}{2}(f(1)-f(0))-\int\_{0}^{1} f^{\prime}(x)\left(\frac{1}{2}-x\right) \\ f(0) &=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x+\left.B\_{1} f(x)\right|\_{0} ^{1}+R\_{m} \end{aligned}\\

接下来，我们完成我们的归纳步骤。 保持

a=0 和

b=1 不变，证明对于所有

m\geqslant1 有：

f(0)=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{0} ^{1}+R\_{m}\\

其中余项为

R\_{m}=(-1)^{m+1} \int\_{0}^{1} \frac{B\_{m}(x)}{m !} f^{(m)}(x)\,\mathrm d x\\

假设以上对所有

k \leqslant m 都成立。 我们将注意力转向余项，利用

B'\_{k+1}(x)=(k+1)B\_k(x)\\

并考虑

\int\_{0}^{1} B\_{m}(x) f^{(m)}(x)\,\mathrm d x\\

由分部积分有

、、

\int\_{0}^{1} B\_{k}(x) f^{(k)}(x)\,\mathrm d x=\left.\frac{B\_{k+1}(x)}{k+1} f^{(k)}(x)\right|\_{0} ^{1}-\frac{1}{k+1} \int\_{0}^{1} B\_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) \,\mathrm d x、、

将其代入，余项变为

、、

\begin{aligned} R\_{m} &=\frac{(-1)^{m+1}}{m !} \int\_{0}^{1} B\_{m}(x) f^{(m)}(x)\,\mathrm d x \\ &=\frac{(-1)^{m+1}}{m !}\left[\left.\frac{B\_{m+1}(x)}{m+1} f^{(m)}(x)\right|\_{0} ^{1}-\frac{1}{m+1} \int\_{0}^{1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x) \,\mathrm d x\right] \\ &=\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1) !}\left[\left.B\_{m+1}(x) f^{(m)}(x)\right|\_{0} ^{1}-\int\_{0}^{1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x) \,\mathrm d x\right] \end{aligned}、、

这里，我们注意到如果

m 是奇数，则

(-1)^{m+1} = 1 。 如果

m 是偶数，则

B\_{m+1}(0) = B\_{m+1}(1) = 0 ，并且

B\_{m+1} = 0 。 因此，我们得到：

\left.\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1) !} B\_{m+1}(x) f^{(m)}(x)\right|\_{0} ^{1}=\left.\frac{1}{(m+1) !} B\_{m+1} f^{(m)}(x)\right|\_{0} ^{1}\\

f(0) 的值变为

\begin{aligned} f(0) &=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{0} ^{1}+R\_{m} \\ &=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{0} ^{1}+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1) !}\left[\left.B\_{m+1}(x) f^{(m)}(x)\right|\_{0} ^{1}-\int\_{0}^{1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,\mathrm d x\right] \\ &=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{0} ^{1}+\left.\frac{1}{(m+1) !} B\_{m+1} f^{(m)}(x)\right|\_{0} ^{1}+\frac{(-1)^{m+2}}{(m+1) !} \int\_{0}^{1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,\mathrm d x \\ &=\int\_{0}^{1} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m+1} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{0} ^{1}+\frac{(-1)^{m+2}}{(m+1) !} \int\_{0}^{1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,\mathrm d x \end{aligned}

这样就完成了归纳。在这个证明的第二步中，对于每个整数

a\leqslant i<b ，求和可得：

\begin{aligned} \sum\_{i=a}^{b-1} f(i) &=\sum\_{i=a}^{b-1}\left[\int\_{i}^{i+1} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m+1} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{i} ^{i+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1) !} \int\_{i}^{i+1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,\mathrm d x\right] \\ &=\sum\_{i=a}^{b-1}\left[\int\_{i}^{i+1} f(x)\,\mathrm d x\right]+\sum\_{i=a}^{b-1}\left[\left.\sum\_{k=1}^{m+1} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{i} ^{i+1}\right]+\sum\_{i=a}^{b-1}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1) !} \int\_{i}^{i+1} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,\mathrm d x\right] \\ &=\int\_{a}^{b} f(x) d x+\left.\sum\_{k=1}^{m+1} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{a} ^{b}+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1) !} \int\_{a}^{b} B\_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,\mathrm d x \end{aligned}

这就是欧拉麦克劳林求和公式。

\square

它也可以表示为：

\boxed{ \sum\_{n=a}^b{f\left( n \right)}=\int\_a^b{f\left( x \right) \text{d}x}+\frac{f\left( a \right) +f\left( b \right)}{2}+\sum\_{k=1}^{\infty}{\frac{B\_{2k}}{\left( 2k \right) !}}\left( f^{\left( 2k-1 \right)}\left( b \right) -f^{\left( 2k-1 \right)}\left( a \right) \right)+R\_p}\\

余项的大小可以估计为

{\displaystyle |R\_{p}|\leqslant {\frac {2\zeta (p)}{(2\pi )^{p}}}\int \_{m}^{n}|f^{(p)}(x)|\,\mathrm dx}\\

在计算和和级数的渐近展开式时，通常最有用的欧拉麦克劳林公式的形式是

\boxed{{\displaystyle \sum \_{n=a}^{b}f(n)\sim \int \_{a}^{b}f(x)\, \text{d}x+{\frac {f(b)+f(a)}{2}}+\sum \_{k=1}^{\infty }\,{\frac {B\_{2k}}{(2k)!}}\left(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right)}}\\

## 广义欧拉麦克劳林公式

\bbox[#EEF,15px,border:2px solid red]{\color{brown}{\begin{aligned} \int\_{a}^{a+h} f(x)\,\mathrm d x=& \frac{h}{2 n}(f(a)+f(a+h))+\frac{h}{n} \sum\_{k=1}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n} h\right) \\ &-\sum\_{k=1}^{m} \frac{{B}\_{2 k}}{(2 k) !}\left(\frac{h}{n}\right)^{2k}\left(f^{(2k-1)}(a+h)-f^{(2 k-1)}(a)\right)\\ &-\frac{n {B}\_{2 m+2} f^{(2 m+2)}(\xi)}{(2 m+2) !}\left(\frac{h}{n}\right)^{2 m+3} \end{aligned}}}\\

其中

\xi \in(a, a+h), n 是正整数，

m 是非负整数。

令

a=0,h=1 有

\bbox[#EEF,15px,border:2px solid red]{\color{blue}{ \begin{align\*} \int\_0^1f(x)\,\mathrm dx=&\frac{f(0)+f(1)}{2n}+\frac1n\sum\_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} \right)\\ &-\sum\_{k=1}^{m} \frac{{B}\_{2 k}}{(2 k) !}\left(\frac{1}{n}\right)^{2k}\left(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2 k-1)}(0)\right)\\ &-\frac{n {B}\_{2 m+2} f^{(2 m+2)}(\xi)}{(2 m+2) !}\left(\frac{1}{n}\right)^{2 m+3} \end{align\*} }}\\

稍加整理我们就得出了一个非常好用的公式

\bbox[#EEF,15px,border:2px solid red]{\color{green}{ \begin{align\*} \frac1n\sum\_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} \right)=&\int\_0^1f(x)\,\mathrm dx+\frac{f(1)-f(0)}{2n}\\ &+\sum\_{k=1}^{m} \frac{{B}\_{2 k}}{(2 k) !}\left(\frac{1}{n}\right)^{2k}\left(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2 k-1)}(0)\right)\\ &+\frac{n {B}\_{2 m+2} f^{(2 m+2)}(\xi)}{(2 m+2) !}\left(\frac{1}{n}\right)^{2 m+3} \end{align\*} }}\\

## 自然数等幂求和

[[3]](#ref_3)前

n - 1 个正整数的

m^{th} 次幂之和等于**(Faulhaber公式)**

S\_{m}(n-1)=\frac{1}{m+1} \sum\_{k=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array}\right) B\_{k} n^{m-k+1}\\

**Proof :**

我们将欧拉麦克劳林公式应用于函数

f(x) = x^p ，其中

，

a = 0 ，b = n 和

m \geqslant 1 。 我们先考虑余项，对于所有

p \leqslant m 有

f^{(p)}(x)=m(m-1)(m-2) \cdots(m-p+1) x^{m-p}\\

因此，

f^{(m)}(x) = m! ，余项变为

\begin{aligned} R\_{m} &=\frac{(-1)^{m+1}}{m !} \int\_{a}^{b} B\_m(y-\lfloor y\rfloor) f^{(m)}\,\mathrm d y \\ &=(-1)^{m+1} \int\_{a}^{b} B\_m(y-\lfloor y\rfloor)\,\mathrm d y \\ &=(-1)^{m+1}\left(\int\_{a}^{a+1} B\_m(y-\lfloor y\rfloor)\,\mathrm d y+\int\_{a+1}^{a+2} B\_m(y-\lfloor y\rfloor)\,\mathrm d y+\cdots+\int\_{b-1}^{b} B\_m(y-\lfloor y\rfloor)\,\mathrm d y\right) \\ &=(-1)^{m+1}\left(\int\_{0}^{1} B\_m(y-\lfloor y\rfloor) \,\mathrm d y+\int\_{0}^{1} B\_m(y-\lfloor y\rfloor)\,\mathrm d y+\cdots+\int\_{0}^{1} B\_m(y-\lfloor y\rfloor) \,\mathrm d y\right) \\ &=(-1)^{m+1}(b-a) \int\_{0}^{1} B\_m(y-\lfloor y\rfloor)\,\mathrm d y \\ &=0 \end{aligned}\\

因此，由欧拉麦克劳林公式得到

\begin{aligned} \sum\_{i=0}^{n-1} x^{m} &=\int\_{0}^{n} x^{m}\,\mathrm dx+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} m(m-1)(m-2) \cdots(m-k+2) x^{m-k+1}\right|\_{0} ^{n}+R\_{m} \\ &=\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{1}{m+1} \sum\_{k=1}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array}\right) B\_{k} n^{m-k+1} \\ &=\frac{1}{m+1} \sum\_{k=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array}\right) B\_{k} n^{m-k+1} \end{aligned}\\

\square

## 欧拉常数

**Euler-Mascheroni** 常数

\gamma 定义为：

\gamma=\lim \_{n \rightarrow \infty}\left(\sum\_{k=1}^{n} \frac{1}{k}-\int\_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\right) \approx 0.57721566\\

利用欧拉麦克劳林公式，容易发现伯努利数和**欧拉马歇罗尼常数**之间的以下关系：

\gamma=\frac{1}{2}+\sum\_{k=1}^{\infty} \frac{B\_{2 k}}{2 k}\\

**Proof :**

令

f(x) =\dfrac{1}{x} ,a = 1,b = n

\begin{aligned} \sum\_{i=a}^{b-1} f(i) &=\int\_{a}^{b} f(x)\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} f^{(k-1)}(x)\right|\_{a} ^{b}+R\_{m} \\ \sum\_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} &=\int\_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm d x+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{k}}{k !} \frac{(-1)^{k-1}(k-1) !}{x^{k}}\right|\_{1} ^{n}+R\_{m} \end{aligned}\\

计算积分

\begin{aligned} \sum\_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} &=\ln n+\left.\sum\_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B\_{k}}{k x^{k}}\right|\_{1} ^{n}+R\_{m} \\ \sum\_{i=1}^{n} \frac{1}{i}-\ln n &=\frac{1}{n}+\sum\_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B\_{k}}{k}\left[\frac{1}{n^{k}}-1\right]+R\_{m} \\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2 n}+\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{2 k}}{2 k}\left[1-\frac{1}{n^{2 k}}\right]+R\_{m} \end{aligned}\\

因为除了

B\_1 之外，伯努利数的所有奇数项都为零。 如果我们在

n 接近无穷大时取这些和，则左侧变为 Euler-Mascheroni 常数。 当

m 接近无穷大时，我们知道

R\_m 变为零，则：

\begin{aligned} \lim \_{m, n \rightarrow \infty}\left[\sum\_{i=1}^{n} \frac{1}{i}-\ln n\right] &=\lim \_{m, n \rightarrow \infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2 n}+\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{2 k}}{2 k}\left[1-\frac{1}{n^{2 k}}\right]+R\_{m}\right] \\ \gamma &=\frac{1}{2}+\sum\_{k=1}^{m} \frac{B\_{2 k}}{2 k} \end{aligned}\\

\square

## 斯特林公式

## 几个例子

## 伯努利数的增长率

## 参考

* [^](#ref_1_0)<https://rosettacode.org/wiki/Bernoulli_numbers>
* [^](#ref_2_0)<https://www.zhihu.com/question/477700807/answer/2042985548>
* [^](#ref_3_0)自然数等幂求和的其它做法 <https://www.zhihu.com/question/369313777>

编辑于 2021-12-12 14:18